

## ANALISIS KESTABILAN MODEL POPULASI SATU MANGSA-DUA PEMANGSA DENGAN TAHAPAN STRUKTUR DAN PEMANENAN PADA PEMANGSA

Rian Ade Pratama<sup>1)</sup>, Markus Palobo<sup>2)</sup>, Maria Fransina Veronica Ruslau<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan – Universitas Musamus Merauke

<sup>2)</sup>Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan – Universitas Musamus Merauke

<sup>3)</sup>Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan – Universitas Musamus Merauke

e-mail: [pratama@unmus.ac.id](mailto:pratama@unmus.ac.id)

### Abstrak

Jurnal ini membahas mengenai model populasi mangsa-pemangsa dengan tahapan struktur. Pengembangan model matematika untuk memprediksi keberlanjutan dari suatu populasi makhluk hidup. Dalam hal ini tahapan struktur terjadi pada pemangsa kecil dan pemangsa dewasa. Fungsi respon yang menjadi karakteristik dari pemangsa adalah dengan mengikuti fungsi respon Holling Type I yang sesuai dengan karakteristik pada ekosistem makhluk hidup. Pada model yang dibentuk tersebut di analisis tentang nilai equilibrium dan kestabilan nilai equilibrium yang paling mendekati. Analisis ini dilakukan dengan menghitung nilai yang ada kesetimbangan pada titik equilibrium yang terbentuk sebagai produk. Metode pelinieran pada sistem titik equilibrium ini untuk mewujudkan nilai eigen yang akan membuat model tersebut memenuhi syarat kestabilan. Pada proses yang dilakukan diperoleh empat produk titik equilibrium. Setiap titik equilibrium tentu memiliki ciri dan karakteristik serta syarat yang unik. Kriteria Routh-Hurwitz menjadi karakteristik yang digunakan untuk menjelaskan karakteristik kestabilannya. Sementara interpretasi dari nilai eigen pada persamaan karakteristik juga mempertimbangkan persamaan karakteristik matriks Jacobi. Disini juga dianalisis dinamika perubahan pada kasus yang memungkinkan dalam ekosistem untuk dilakukan eksloitasi jangka panjang dan berkelanjutan.

**Kata Kunci:** Equilibrium, Holling Type I, Pemanenan.

### PENDAHULUAN

Proses kelangsungan hidup suatu populasi di alam tidak terlepas dari dinamika, hal ini disebabkan karena adanya interaksi yang terjadi antar masing-masing populasi. Salah satu interaksi yang sering terjadi adalah interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa dikenal dengan dinamika model populasi predator-prey [1]. Dalam model predator-prey juga terdapat interaksi intraspesifik atau interaksi yang terjadi antar individu dalam populasi mangsa atau interaksi yang terjadi antar populasi pemangsa, dan interaksi interspesifik atau interaksi yang terjadi dalam populasi mangsa atau pemangsa. Dinamika yang terjadi tersebut dikaji dan dipelajari dalam ilmu ekologi [2]. Keberlanjutan suatu populasi sangat bergantung pada dinamika yang

terjadi pada suatu ekosistem [3]. Dinamika yang dimaksud disini adalah suatu sistem kontrol, sehingga diperoleh populasi seimbang yang stabil untuk jangka waktu yang relatif lama.

Telah banyak penelitian yang membahas dan mengembangkan model populasi predator-prey, hingga saat ini. Pengembangan umumnya mengarah pada perluasan asumsi yang mendekati dengan kondisi kehidupan pada suatu ekosistem. Kita ambil saja untuk fungsi predasi Holling I yang menjadi pengembangan awal pada wujud cara pemangsaan dari predator. Dalam penelitian yang lebih luas mengembangkan fungsi predasi Holling Type I, Holling Type II, Holling Type III dan Holling Type IV [4]. Dunia saat ini sangat memperhatikan pengembangan model popuasi ikan paus

yang terus berkelanjutan [5]. Model predator-prey juga banyak yang membahas tentang stage-structure pada predator. Pola pemisahan usia predator ini banyak dikembangkan dengan model yang lebih luas. Populasi predator kecil dan predator dewasa menjadi fokus dalam penelitian ini untuk dikembangkan.

Dalam aspek kehidupan ekosistem suatu ekologi tertentu bisa dilakukanya suatu eksplorasi atau pemanenan. Pemodelan yang melibatkan pemanenan juga banyak dilakukan pada saat ini. Pemanenan dalam hal ini tentu akan melihat perkembangan permintaan dari kebutuhan pasar [6]. Sehingga dibutuhkan juga suatu model keuntungan yang menjamin keberlanjutan jumlah populasi dalam jangka waktu yang sangat panjang. Fungsi keuntungan tersebut digunakan untuk mengoptimalkan keuntungan dan mengatur keberlanjutan populasi dalam ekosistem [7].

## MODEL POPULASI PREDATOR-PREY

Model predator-prey yang digunakan dalam penelitian ini mengembangkan model populasi pada suatu ekosistem yang lebih terbuka. Laju pertumbuhan populasi prey adalah laju pertumbuhan logistik. Fungsi predasi pada predator menggunakan fungsi respon Holling Type I yang sangat mendekati dengan kondisi ekosistem ekologi [8]. Populasi pemangsa terdiri dari populasi immature dan mature. Sementara untuk populasi mangsa hidup eksis dalam ekosistem atau dengan kata lain hanya satu populasi. Kehidupan populasi predator sangat bergantung pada jumlah mangsa yang tersedia. Sementara untuk populasi immature predator hanya mendapat sumber makanan dari interaksi mature dan prey. Immature tidak melakukan interaksi langsung dengan prey, hanya mature yang memiliki interaksi

dengan mangsa. Immature tidak dapat melakukan produktifitas dan keberlangsungannya tergantung oleh interaksi aktif predator dan mature. Sehingga dapat dimodelkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \rho_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) - \beta xz \\ \frac{dy}{dt} &= c \beta x z - (\alpha + \delta_1) y \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha y - \delta_2 z\end{aligned}\quad (1)$$

dengan nilai awal

$$x(0) > 0; y(0) \geq 0; z(0) \geq 0$$

Dengan simbol  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  dan  $\frac{dz}{dt}$  masing-masing menunjukkan pertumbuhan populasi predator, immature predator dan mature predator. Nilai  $\rho_1$  adalah laju pertumbuhan intrinsik pada populasi prey dan nilai  $k_1$  merupakan daya tampung (*carrying capacity*) untuk populasi prey. Sementara untuk bentuk fungsi predasi yang mewakili interaksi predator dan prey adalah fungsi Holling I yaitu  $\beta xz$  [9]. Nilai  $\beta$  dan  $c$  masing-masing mewakili angka pemangsaan yang relevan terhadap angka perubahan dari mature  $c$ . Populasi predator dalam hal ini memiliki kemampuan untuk melakukan reproduksi dan memiliki interaksi yang langsung dengan prey dalam ekosistem. Untuk  $\alpha$  merupakan laju perubahan immature ke mature yang kondusif. Model populasi tersebut mengalami pengurangan oleh fungsi predasi. Sementara  $\delta_1$  dan  $\delta_2$  masing-masing merupakan angka laju kematian alami yang dialami oleh immature dan mature.

Dengan kondisi populasi yang seimbang tersebut dapat dilakukan pemanenan untuk memperoleh keuntungan yang maksimal. Oleh karenanya model (1) mengalami modifikasi karena adanya pemanenan yang selektif tersebut. Model tersebut adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \rho_1 \left(1 - \frac{x}{k_1}\right) - \beta xz - q_1 E_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= c \beta x z - (\alpha + \delta_1) y - \phi y^2 \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha y - \delta_2 z - q_2 E_2 z\end{aligned}\quad (2)$$

Dimana  $\phi$  adalah angka koefisien interaksi kompetisi interspesifik populasi immature. Untuk  $q_1$  dan  $q_2$  masing-masing adalah laju ketertangkapan pada prey dan pada mature. Karena pemanenan ini memperhatikan kondisi pemanenan yang berkelanjutan, maka karakteristiknya adalah pemanenan selektif. Untuk  $E_1$  dan  $E_2$  merupakan usaha pemanenan yang dilakukan pada mangsa dan mature. Pada model (2) digunakanlah variabel yang berdimensi tanpa melakukan non-dimensional.

Tabel 1. Definisi variabel pada model (2).

Variabel	Definisi	Unit
$x$	Populasi prey	[N]
$y$	Populasi predator (immature)	[N]
$z$	Populasi predator (mature)	[N]

Tabel 2. Nilai parameter pada model (2).

Parameter	Nilai	Unit	Referensi
$\rho_1$	1.5	$[T]^{-1}$	[1]
$k_1$	100	[N]	[2]
$\beta$	0.031	$[N]^{-1} [T]^{-1}$	[1]
$c$	0.41	-	[4]
$\alpha$	0.08	$[T]^{-1}$	[3]
$\phi$	0.06	$[N]^{-1} [T]^{-1}$	[1]
$\delta_1$	0.1	$[T]^{-1}$	[1]
$\delta_2$	0.008	$[T]^{-1}$	[2]

## HASIL DAN DISKUSI

Analisis titik kesetimbangan dimulai dari melakukan analisis model (2). Selanjutnya akan diselidiki titik kesetimbangan dari model (2). Untuk titik kesetimbangan masing-masing yang mungkin pada model

(2) adalah  $I_1(0, 0, 0)$ ,  $I_2(0, K, L)$ ,  $I_3(M, 0, 0)$  dan  $I_4(x', y', z')$ .

Dimana

$$\begin{aligned}K &= \frac{k_1(q_1 E_1 - \rho_1)}{\rho_1}, \\ L &= -\frac{\alpha + \delta_1}{\phi}, \\ M &= -\frac{\alpha(\alpha + \delta_1)}{\phi(q_2 E_2 + \delta_2)}, \\ x' &= \frac{P_1 E_1 E_2^2 - P_2 E_1 E_2 + P_3 E_2^2}{P_7 E_2^2 + P_8 E_2 + P_9} \\ &\quad + \frac{P_4 E_2 - P_5 E_1 + P_6}{P_7 E_2^2 + P_8 E_2 + P_9}, \\ y' &= \frac{(S_1 E_1 + S_2 E_2 + S_3)(q_2 E_2 + \delta_2)}{P_7 E_2^2 + P_8 E_2 + P_9}, \\ z' &= \frac{(G_1 E_1 + G_2 E_2 + G_3)}{P_7 E_2^2 + P_8 E_2 + P_9}.\end{aligned}$$

dimana  $P_1 = -\phi q_1 q_2^2 k_1$ ,  $P_2 = 2\phi q_1 q_2 \delta_2 k_1$ ,  $P_3 = \phi q_2^2 \rho_1 k_1$ ,  $P_4 = k_1(\alpha^2 \beta q_2 + \alpha \beta q_2 \delta_1 + 2\phi q_1 \delta_2 \rho_1)$ ,  $P_5 = \phi q_1 \delta_2^2 k_1$ ,  $P_6 = (\alpha^2 \beta \delta_2 k_1 + \alpha \beta \delta_1 \delta_2 k_1 + \phi \delta_2^2 \rho_1 k_1)$ ,  $P_7 = \phi q_2^2 \rho_1$ ,  $P_8 = 2\phi q_2 \delta_2 \rho_1$ ,  $P_9 = (\phi \delta_2^2 \rho_1 + \alpha^2 \beta^2 c k_1)$ ,  $S_1 = \alpha \beta c q_1 k_1$ ,  $S_2 = (\alpha q_2 \rho_1 + q_2 \delta_1 \rho_1)$ ,  $S_3 = (-\alpha \beta c q_1 k_1 + \alpha \delta_2 \rho_1 + \delta_2 \delta_1 \rho_1)$ ,  $G_1 = \alpha^2 \beta c q_1 k_1$ ,  $G_2 = (\alpha^2 q_2 \rho_1 + \alpha q_2 \delta_1 \rho_1 - \alpha^2 \beta c k_1 \rho_1)$ .

Dengan memilih titik kesetimbangan positif untuk model (2) yang relevan dengan titik kesetimbangan pada model (1). Titik kesetimbangan pada model (2) yang terbentuk tersebut adalah  $T_4(x', y', z')$ . Dengan mensubsitusikan nilai dari titik equilibrium pada matriks Jacobian maka diperoleh bahwa

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

dimana

$$J_{11} = \rho_1 - \frac{2\rho_1\delta_2(\alpha^2\beta + \alpha\beta\delta_1 + \phi\delta_2\rho_1)}{(\alpha^2\beta^2c k_1 + \phi\delta_2^2\rho_1)}$$

$$- \frac{\beta\alpha\rho_1(\alpha\beta ck_1 - \alpha\delta_2 - \delta_1\delta_2)}{(\alpha^2\beta^2c k_1 + \phi\delta_2^2\rho_1)}$$

$$J_{13} = - \frac{\beta\delta_2 k_1(\alpha^2\beta + \alpha\beta\delta_1 + \phi\delta_2\rho_1)}{(\alpha^2\beta^2c k_1 + \phi\delta_2^2\rho_1)}$$

$$J_{21} = \frac{\beta c\alpha\rho_1(\alpha\beta ck_1 - \alpha\delta_2 - \delta_1\delta_2)}{(\alpha^2\beta^2c k_1 + \phi\delta_2^2\rho_1)}$$

$$J_{22} = - \frac{2\phi\rho_1\delta_2(\alpha\beta ck_1 - \alpha\delta_2 - \delta_1\delta_2)}{(\alpha^2\beta^2c k_1 + \phi\delta_2^2\rho_1)}$$

$$- \alpha - \delta_1$$

$$J_{23} = \frac{c\beta k_1\delta_2(\alpha^2\beta + \alpha\beta\delta_1 + \phi\delta_2\rho_1)}{(\alpha^2\beta^2c k_1 + \phi\delta_2^2\rho_1)}$$

$$J_{32} = \alpha$$

$$J_{33} = -\delta_2$$

Persamaan karakteristik Jacobian dari matriks  $J(I_4)$  adalah

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0,$$

dengan

$$A_1 = -(J_{11} + J_{22} + J_{33}),$$

$$A_2 = J_{11}J_{22} + J_{11}J_{33} + J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32},$$

$$A_3 = J_{11}J_{23}J_{32} - J_{11}J_{22}J_{33} - J_{13}J_{32}J_{21}.$$

Dengan menggunakan kriteria kestabilan Hurwitz [12], titik equilibrium  $I_4$  yang asimtotik stabil dimana memenuhi kondisi  $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0$ , dan  $A_1A_2 > A_3$ .

### Keuntungan Maksimal dari Pemanenan

Kestabilan titik equilibrium dari model (2) dapat dilakukan pemanenan maksimum untuk populasi yang di panen tersebut. Kami menggunakan koefisien parameter pemanenan untuk setiap pemanenan yang dilakukan. Untuk perlakuan pemanenan yang dilakukan diasumsikan mempertimbangkan pendapatan dan biaya usaha. Dengan demikian total semua pendapatan kami bentuk dalam  $TR = p_1x'E_1 + p_2z'E_2$  serta total biaya kami bentuk dalam  $TC = c_1E_1 + c_2E_2$ . Masing-

masing  $c_1$  dan  $c_2$  adalah koefisien banyaknya biaya pada pemanenan prey dan mature.

Fungsi keuntungan untuk pemanenan pada populasi mangsa dan mature dengan titik equilibrium  $T_4$  adalah

$$\pi = p_1x'E_1 + p_2z'E_2 - c_1E_1 - c_2E_2 \quad (3)$$

$$\pi = \frac{(P_1E_1E_2^2 - P_2E_1E_2 + P_3E_2^2)}{P_7E_2^2 + P_8E_2 + P_9}$$

$$+ \frac{P_4E_2 - P_5E_1 + P_6}{P_7E_2^2 + P_8E_2 + P_9}$$

$$- \frac{(G_1E_1 + G_2E_2 + G_3)}{P_7E_2^2 + P_8E_2 + P_9}$$

$$- c_1E_1 - c_2E_2$$

dimana:

$$P_1 = -\phi q_1 q_2^2 k_1, \quad P_2 = 2\phi q_1 q_2 \delta_2 k_1,$$

$$P_3 = \phi q_2^2 \rho_1 k_1, \quad P_4 = k_1(\alpha^2 \beta q_2 + \alpha \beta q_2 \delta_1 + 2\phi q_1 \delta_2 \rho_1), \quad P_5 = \phi q_1 \delta_2^2 k_1,$$

$$P_6 = (\alpha^2 \beta \delta_2 k_1 + \alpha \beta \delta_1 \delta_2 k_1 + \phi \delta_2^2 \rho_1 k_1),$$

$$P_7 = \phi q_2^2 \rho_1, \quad P_8 = 2\phi q_2 \delta_2 \rho_1, \quad P_9 = (\phi \delta_2^2 \rho_1 + \alpha^2 \beta^2 c k_1).$$

### SIMULASI NUMERIK

Angka parameter dipilih dalam simulasi bersumber dari beberapa referensi dan digunakan asumsi-asumsi dasar yang relevan. Angka parameter pada simulasi numerik adalah  $\rho_1 = 1.5, k_1 = 100, \phi = 0.06, \beta = 0.04, c = 0.02, \alpha = 0.2, \delta_1 = 0.04, \delta_2 = 0.02$ . Nilai kesetimbangan yang diperoleh yaitu

$$T_4 =$$

$$(45.36585366, 2.048780488, 20.48780488)$$

Matriks Jacobi dari  $I_4$  adalah

$$J(I_4) \begin{bmatrix} -0.6804878052 & 0 & -1.814634146 \\ 0.0163902439 & -0.4858536586 & 0.03629268293 \\ 0 & 0.2 & -0.02 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik yang dibentuk dari  $J(I_4)$  adalah

$$\lambda^3 + 1.186341464 \lambda^2 + 0.3466857825 \lambda + 0.007621463413 = 0.$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah  $\lambda_1 = -0.718747583053731$ ,  
 $\lambda_2 = -0.443695007267116$ ,  $\lambda_3 = -0.023898873479153$ .

#### Simulasi Numerik dengan Pemanenan

Angka parameter pada simulasi numerik adalah  $\rho_1 = 1.5$ ,  $k_1 = 100$ ,  $\phi = 0.06$ ,  $\beta = 0.04$ ,  $c = 0.02$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\delta_1 = 0.04$ ,  $\delta_2 = 0.02$ ,  $p_1 = 100$ ,  $p_2 = 100$ ,  $c_1 = 50$ ,  $c_2 = 50$ .

Titik equilibrium pada  $I_4$  dengan  $E_1 > 0$  dan  $E_2 > 0$  diperoleh  $I_4(E_1, E_2) = (x', y', z')$

$$x' = -\frac{60(25000E_1E_2^2 - 1000E_1E_2 - 37500E_2^2)}{22500E_2^2 + 900E_2 + 41} + \frac{2300E_2 - 10E_1 - 31}{22500E_2^2 + 900E_2 + 41},$$

$$y' = \frac{4(1000E_1E_2 + 22500E_2^2 + 20E_1)}{22500E_2^2 + 900E_2 + 41} - \frac{600E_2 + 21}{22500E_2^2 + 900E_2 + 41},$$

$$z' = -\frac{40(20E_1 + 450E_2 - 21)}{22500E_2^2 + 900E_2 + 41}.$$

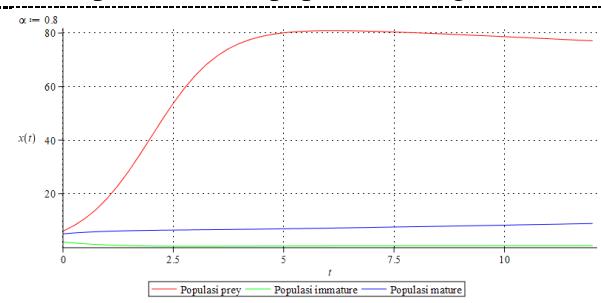
Sehingga untuk fungsi keuntungan yang diperoleh adalah

$$\pi = -\frac{100E_1(1.500000 \cdot 10^6 E_1 E_2^2)}{P_7 E_2^2 + P_8 E_2 + P_9} + \frac{60000E_1 E_2 + 2.250000 \cdot 10^6 E_2^2}{P_7 E_2^2 + P_8 E_2 + P_9} - 100E_1 \left( \frac{(-1.38000 \cdot 10^5 E_2)}{P_7 E_2^2 + P_8 E_2 + P_9} + \frac{600E_1 - 1860}{P_7 E_2^2 + P_8 E_2 + P_9} \right) - 50E_1 \quad (4)$$

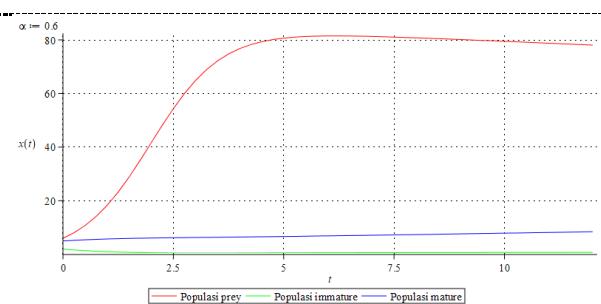
Dari fungsi keuntungan (4) diperoleh titik stasioner positif pemanenan yaitu  $(E_1, E_2) = (0.9834969594, 0.04710527684)$ . Dengan mensubsitusikan nilai titik stasioner  $(E_1, E_2)$  kedalam fungsi keuntungan (4), maka di peroleh keuntungan sebesar  $\pi = 4900.662833$ . setelah ini kami akan membahas perubahan jumlah populasi dari faktor angka perubahan dinamika populasi immature ke mature sebagai proses transisi ledakan populasi.

#### Dinamika populasi untuk efisiensi pertumbuhan immature ke mature

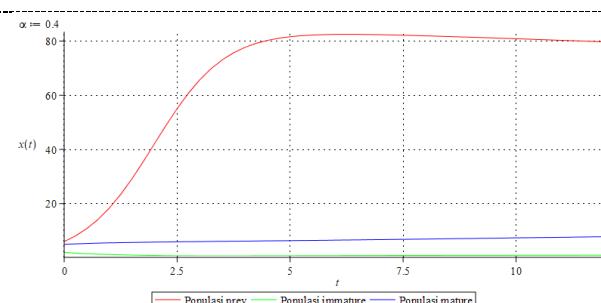
Dinamika populasi diperlihatkan dari kasus percobaan, yang dilandasi untuk simulasi numerik. Pengamatan akan dilakukan pada perubahan populasi mangsa ( $x$ ), perubahan populasi immature ( $y$ ) and perubahan populasi mature ( $z$ ). Dari setiap perubahan yang terjadi akan di amati keseimbangan sistem model (2) dalam ekosistem. Dinamika dari setiap populasi akan di sajikan dalam kurva pertumbuhan populasi, sebagai berikut



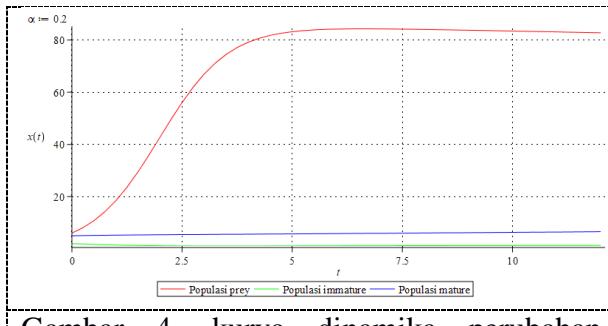
Gambar 1. kurva dinamika perubahan populasi pada  $\alpha = 0,8$ .



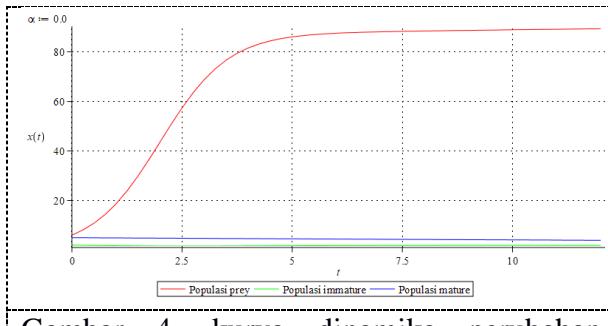
Gambar 2. kurva dinamika perubahan populasi pada  $\alpha = 0,6$ .



Gambar 3. kurva dinamika perubahan populasi pada  $\alpha = 0,4$ .



Gambar 4. kurva dinamika perubahan populasi pada  $\alpha = 0.2$ .



Gambar 4. kurva dinamika perubahan populasi pada  $\alpha = 0.0$ .

Dari masing-masing gambar 1, gambar 2, gambar 3, gambar 4 dan gambar 5, memperlihatkan hasil yang mengidentifikasi karakteristik masing-masing. Perubahan laju perpindahan usia populasi immature ke mature ternyata sangat berpengaruh signifikan. Laju perubahan  $\alpha$  tiak selalu konstan, karena dalam kehidupan ekosistem ada yang dinamakan bencana alam atau kerusakan oleh perubahan ekosistem secara alami. Oleh karena itu angka efisensi perubahan sangat menentukan laju pertumbuhan populasi yang lainnya. Semakin kecil laju perpindahan usia immature ke mature, pertumbuhan populasi mangsa semakin signifikan. Sedangkan untuk pertumbuhan populasi mature sangat cenderung sama laju pertumbuhannya dengan laju pertumbuhan populasi immature (*linieritas system*).

## KESIMPULAN

Model populasi predator-prey dengan tahapan struktur dan pemanenan optimal memperlihatkan hasil yang baik dalam dinamika populasi. Diperolehnya keuntungan maksimal dari sistem model populasi yaitu  $\pi = 4900.662833$ . Tujuan pemanenan yang dilakukan dalam populasi adalah menjaga kestabilan dan keberlanjutan ekosistem itu senidri. Tentu dalam kehidupan ekosistem, tidak diharapkan adanya kepunahan populasi. Selain itu juga kita dapatkan informasi bahwa laju efisensi perpindahan populasi immature ke mature sangat signifikan mempengaruhi. Hal ini ditandai dengan meningkatnya jumlah populasi prey jika perpindahan immature ke mature menurun. Sementara pertumbuhan populasi mature sangat linier dengan pertumbuhan populasi immature.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Pratama R A, Toaha S and Kasbawati 2019 Optimal harvesting and stability of predator prey model with Monod-Haldane predation response function and stage structure for predator *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* **279**
- [2] Kasbawati, Gunawan A Y and Sidarto K A 2017 Washout and non-washout solutions of a system describing microbial fermentation process under the influence of growth inhibitions and maximal concentration of yeast cells *Math. Biosci.* **289** 40–50
- [3] Pratama R A, Ruslau M F V., Nurhayati and Laban S 2019 Analysis stability of predator-prey model with Holling type I predation response function and stage structure for predator Analysis stability of predator - prey model with Holling type I predation response function and stage structure for predator *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* **343** 8
- [4] Toaha S and Rustam 2017 Optimal harvesting policy of predator-prey model with free fishing and reserve zones *AIP Conf. Proc.* **1825** 1–8
- [5] Thieme R H 2005 Mathematics in Population Biology *Math. Biosci.* **193** 13–8
- [6] Nurhayati, Pratama R A and Ruslau M F V. 2019 Analysis of a point on line segments in geometry analytical concepts *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* **343** 8
- [7] Khajanchi S 2017 Modeling the Dynamics of Stage-Structure Predator-Prey System with Monod-Haldane type Response Function *Appl. Math. Comput.* **302** 122–43
- [8] Gourley S A and Kuang Y 2004 A Stage Structured Predator-Prey Model and its Dependence on Maturation Delay and Death Rate *Math. Biol.* **200** 188–200
- [9] Farajzadeh A, Doust M H R, Haghifard F and Baleanu D 2012 The stability of Gauss model having one-prey and two-predators *Abstr. Appl. Anal.* **2012** 1–10